Problema nr. 1 (10 puncte)

Balon meteorologic

Pentru studierea atmosferei se folosesc adesea baloane meteorologice, umplute cu heliu. Aceste baloane se ridică în atmosferă și, în anumite condiții, pot rămâne în echilibru în atmosferă.
În cele ce urmează consideră că aerul atmosferic și gazul din balon (heliul) pot fi considerate gaze ideale. Poți presupune că masa învelișului balonului este neglijabilă.

Dacă îți este necesar poți folosi relația $(1+x)^n \cong 1+n\cdot x$*, pentru* $x \ll 1$*, oricare ar fi* $n \in \mathbb{R}$.

Sarcina de lucru nr. 1

Această sarcină de lucru îți propune să studiezi dependența temperaturii aerului atmosferic de înălțimea, măsurată în raport cu suprafața Pământului.

Consideră că la înălțimea z la care se află balonul, aerul atmosferic din exteriorul balonului are temperatura $T_A(z)$ și că viteza de variație a temperaturii aerului atmosferic cu înălțimea este $\Gamma_A = dT_A/dz$. Ai în vedere faptul că înălțimea z se măsoară pe verticală în sus față de suprafața Pământului. Aerul atmosferic evoluează adiabatic, masa lui molară este μ_A. Exponentul adiabatic al aerului este γ_A, iar constanta universală a gazelor ideale este R. Presupune că accelerația gravitațională $\vec{g}$ nu variază cu înălțimea.

1.a.	Dedu expresia vitezei de variație Γ_A a temperaturii cu înălțimea, pentru aerul atmosferic. Exprimă rezultatul în funcție de masa molară μ_A, de mărimea accelerației gravitaționale g, de exponentul adiabatic al aerului γ_A și de constanta universală a gazelor ideale R.	(1,5 p)

1.b.	Calculează valoarea pentru Γ_A, dacă masa molară a aerului este $\mu_A = 29{,}0\ kg\cdot kmol^{-1}$ și exponentul său adiabatic este $\gamma_A = 1{,}40$. Constanta universală a gazelor ideale este $R = 8{,}31\cdot 10^3\ J\cdot K^{-1}\cdot kmol^{-1}$ și accelerația gravitațională are valoarea $g = 9{,}80\ m\cdot s^{-2}$.	(0,3 p)

1.c.	Determină expresia dependenței $T_A = T_A(z)$ a temperaturii aerul atmosferic de înălțimea z. Consideră că la nivelul suprafeței Pământului $z=0$ temperatura aerului atmosferic este $T_A(0) = T_0$. Exprimă rezultatul în funcție de μ_A, g, T_0 și de căldură molară la presiune constantă a aerului $C_{p,A}$.	(0,5 p)

Sarcina de lucru nr. 2

În cadrul acestei sarcini de lucru vei studia dependența de înălțime a temperaturii gazului din balonul meteorologic, considerând că gazul din balon nu schimbă căldură cu mediul exterior.
Notează cu μ_B masa molară a gazului din balon, cu γ_B exponentul adiabatic al gazului din balon și cu $T_B(z)$ temperatura acestui gaz, atunci când balonul se află la înălțimea z. Ai în vedere faptul că la orice înălțime presiunea gazului din balon este egală cu presiunea aerului atmosferic din exteriorul balonului și că, la nivelul suprafeței Pământului ($z=0$), temperatura gazului din balon

este $T_B(0) = T_0$. Raportul căldurilor molare la presiune constantă pentru aer, respectiv pentru gazul din balon este $\eta = C_{p,A}/C_{p,B}$.

2.a.	Determină expresia vitezei de variație $\Gamma_B = dT_B/dz$ a temperaturii gazului din balon, cu înălțimea. Exprimă rezultatul în funcție de masa molară a aerului μ_A, de mărimea accelerației gravitaționale g, de exponentul adiabatic al gazului din balon γ_B, de constanta universală a gazelor ideale R, precum și de temperaturile T_A și T_B.	(1,0 p)

2.b.	Dedu expresia vitezei de variație Γ_B în funcție de Γ_A, de temperaturile T_0 și T_B, de înălțimea z și de raportul η al căldurilor molare la presiune constantă pentru aer, respectiv pentru gazul din balon.	(0,5 p)

2.c.	Determină expresia variației cu înălțimea a temperaturii $T_B = T_B(z)$ a gazul din balon. Exprimă rezultatul în funcție de z, Γ_A, η și T_0.	(1,2 p)

Sarcina de lucru nr. 3

Balonul care se ridică în atmosferă poate atinge o situație de echilibru și în anumite condiții balonul meteorologic poate oscila în jurul acestei poziții de echilibru.
Sarcina de lucru nr. 3 îți propune să determini înălțimea corespunzătoare situației de echilibru a balonului meteorologic în atmosferă și să studiezi micile oscilații ale balonului, în jurul acestei poziții de echilibru.

3.a.	Dedu expresia accelerației $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ a balonului, în funcție de temperaturile T_A și T_B menționate la sarcinile de lucru anterioare, de accelerația gravitațională g și de masele molare μ_A și μ_B.	(1,0 p)

3.b.	Determină expresia înălțimii z_E, la care balonul meteorologic este echilibru în atmosferă. Exprimă rezultatul în funcție de Γ_A, T_0, μ_A, μ_B și η.	(1,0 p)

3.c.	Dedu condiția de apariție a micilor oscilații ale balonului în jurul poziției de echilibru, poziție determinată în cadrul sarcinii de lucru 3.b. Aceste oscilații sunt cunoscute sub numele de oscilații Brunt–Väisälä.	(2,5 p)

3.d.	Determină expresia pulsației Ω a micilor oscilații ale balonului în jurul poziției sale de echilibru în atmosferă. Exprimă rezultatul în funcție de g, T_0, $C_{p,A}$, μ_A, μ_B și η.	(0,5 p)

© Subiect propus de:
Prof. Dr. Delia DAVIDESCU

Foaie de Răspunsuri

Problema nr. 1 (10 puncte)

Balon meteorologic

1.a.	Expresia vitezei de variație a temperaturii cu înălțimea, pentru aerul atmosferic $\Gamma_A =$	1,5p
1.b.	Valoarea $\Gamma_A =$	0,3p
1.c.	Expresia dependenței $T_A(z) =$	0,5p
2.a.	Expresia vitezei de variație a temperaturii gazului din balon, cu înălțimea $\Gamma_B =$	1,0p
2.b.	Expresia $\Gamma_B(\Gamma_A, T_0, T_B, z, \eta) =$	0,5p
2.c.	Expresia dependenței $T_B(z) =$	1,2p
3.a.	Expresia accelerației balonului $\frac{d^2z}{dt^2} =$	1,0p
3.b.	Expresia înălțimii $z_E =$	1,0p
3.c.	Condiția de apariție a micilor oscilații ale balonului	2,5p
3.d.	Expresia pulsației micilor oscilații ale balonului $\Omega =$	0,5p
	Total	10p

Problema nr. 2 (10 puncte)

Oglinda relativistă

Această problemă îți propune să studiezi reflexia unui fascicul de fotoni pe o oglindă plană, perfect reflectătoare, care se deplasează cu o viteză relativistă. În cele ce urmează, această oglindă va fi denumită oglindă relativistă. Consideră că fasciculul de fotoni și oglinda relativistă se deplasează în vid și presupune că fotonii formează un fascicul paralel și foarte îngust.

Pentru rezolvarea aceste probleme, consideră două sisteme de referință inerțiale (K) și (K'), ale căror origini O și O' coincid la momentul $t_0 = 0$. Sistemul de referință (K') se deplasează cu viteza constantă, relativistă $\vec{v}$ față de sistemul (K) (figura nr. 1).

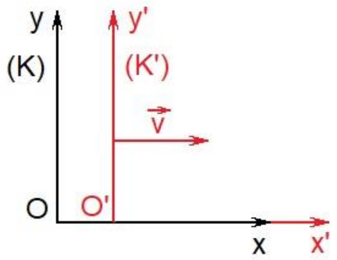

Figura nr. 1

În rezolvarea diferitelor sarcini de lucru, indică răspunsurile - după caz – în funcție de simbolurile mărimilor indicate în tabelul nr. 1.

Tabelul nr. 1

c	Mărimea vitezei fotonilor
v	Mărimea vitezei oglinzii relativiste, în raport cu sistemul de referință inerțial (K)
ν_i	Frecvența fotonilor din fasciculul incident pe oglinda relativistă, frecvență determinată în raport cu sistemul de referință inerțial (K)
θ_i	Unghiul de incidență al fotonilor din fasciculul incident pe oglinda relativistă, unghi determinat în raport cu sistemul de referință inerțial (K)

Sarcina de lucru nr. 1

În cadrul sarcinii de lucru nr. 1 vei analiza reflexia unui fascicul de fotoni pe o oglindă relativistă, în situația în care fotonii incidenți vin spre oglindă, după direcția normală la suprafața oglinzii.

O sursă S, aflată în repaus relativ în raport cu sistemul de referință inerțial (K) este situată pe axa Ox și emite în direcția și sensul axei Ox un fascicul foarte îngust de fotoni.

O oglindă plană M, perfect reflectătoare, perpendiculară pe axa Ox se deplasează cu viteza relativistă $\vec{v}$ în direcția și sensul axei Ox (figura 2). Toți fotonii incidenți pe oglinda relativistă au aceeași frecvență ν_i.

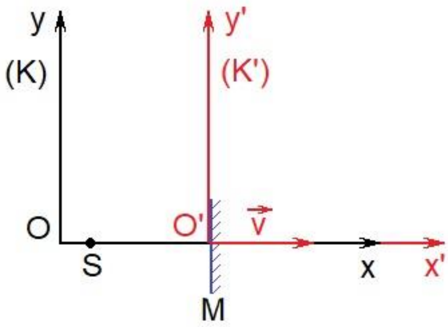

Figura nr. 2

1.a.	Determină expresia ν_r a frecvenței fotonilor reflectați de oglinda relativistă. Exprimă frecvența ν_r în raport cu sistemul de referință inerțial (K).	(2,0 p)

1.b.	Folosind expresia dedusă în cadrul sarcinii de lucru 1.a., determină expresia frecvenței $\nu_{r,cls}$ a fotonilor reflectați, în cazul în care viteza oglinzii ar fi $v \ll c$.	(0,5 p)

Sarcina de lucru nr. 2

Sarcina de lucru nr. 2 îți propune să analizezi reflexia pe oglinda relativistă a unui fascicul paralel și foarte îngust de fotoni, în situația în care acești fotoni ajung la oglindă sub un unghi de incidență nenul.

Fascicul îngust de fotoni este emis de o sursă, aflată în repaus relativ în raport cu sistemul de referință inerțial (K).

O oglindă plană M, perfect reflectătoare, perpendiculară pe axa Ox se deplasează cu viteza relativistă $\vec{v}$ în direcția și sensul axei Ox Toți fotonii incidenți pe oglinda relativistă M au aceeași frecvență ν_i. Unghiul de incidență al fasciculului de fotoni pe oglindă este θ_i (figura 3).

Fasciculul de fotoni este reflectat pe oglinda relativistă sub unghiul de reflexie θ_r, determinat în raport cu sistemul de referință inerțial (K).

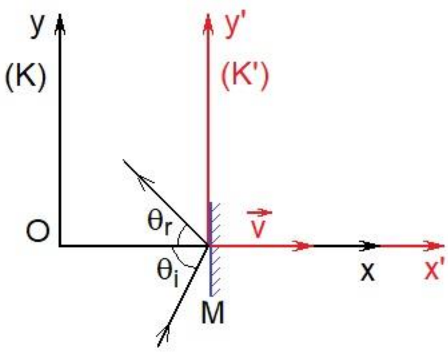

Figura nr. 3

2.a.	Determină expresia ν_r a frecvenței fotonilor reflectați de oglinda relativistă. Exprimă frecvența ν_r în raport cu sistemul de referință inerțial (K).	(5,0 p)

2.b.	Dedu o expresie a unghiului de reflexie θ_r a fotonilor pe oglinda relativistă. Exprimă unghiul de reflexie θ_r în raport cu sistemul de referință inerțial (K).	(2,5 p)

Delia Constanța DAVIDESCU, PhD

Foaie de Răspunsuri

Problema nr. 2 (10 puncte)

Oglinda relativistă

1.a.	Expresia frecvenței fotonilor reflectați de oglinda relativistă $\nu_r =$	2,0p
1.b.	Expresia frecvenței fotonilor reflectați, în cazul în care viteza oglinzii ar fi $v << c$ $\nu_{r,cls} =$	0,5p
2.a.	Expresia frecvenței fotonilor reflectați de oglinda relativistă $\nu_r =$	5,0p
2.b.	O expresie a unghiului de reflexie a fotonilor pe oglinda relativistă $\theta_r =$	2,5p
	Total	10p